ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Транспортная задача формулируется следующим образом. Однородный продукт, со­средоточенный в *т* пунктах производства (хранения) в количествах a1, а2,..., аm еди­ниц, необходимо распределить между *п* пунктами потребления, которым необходимо соответственно b1, b2,..., bn единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения равна Cij, и известна для всех маршрутов. Необходимо составить план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были минимальными.

Обозначим через xij количество груза, планируемого к перевозке от i-ro поставщика j-му потребителю. При наличии баланса производства и потребления

 (32)

математическая модель транспортной задачи будет выглядеть так:

найти план перевозок

Х = (xij), i = j = 

минимизирующий общую стоимость всех перевозок

 (33)

при условии, что из любого пункта производства вывозится весь продукт

* ,*  i= (34)

а любому потребителю доставляется необходимое количество груза

* ,*  j= (35)

причем по смыслу задачи

xi1>0,...., xmn>0. (36)

Для решения транспортной задачи чаще всего применяется метод потенциалов. Пусть исходные данные задачи имеют вид

A(a1. a*2,* а3) = (54; 60; 63); B(b1, b2, b3 ) =(41; 50; 44; 30); С= 

Общий объем производства = 55+60+63 = 178 больше, требуется всем потреби­телям =42+50+44+30=166, т.е. имеем открытую модель транспортной задачи. Для превращения ее в закрытую вводим фиктивный пункт потребления с объемом потреб­ления 178-166 = 12 единиц. Причем тарифы на перевозку в этот пункт условимся счи­тать равными нулю, помня, что переменные, добавляемые к левым частям неравенств для превращения их в уравнения, входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

Первое базисное допустимое решение легко построить по правилу «северо­западного угла».

Следует иметь в виду, что по любой транспортной таблице можно восстановить со­ответствующий предпочитаемый эквивалент системы уравнений (34), (35), а в таблице записаны лишь правые части уравнений, причем номер клетки показывает, какая неиз­вестная в соответствующем уравнении является

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребление  Производство | b1 =41 | | b2 =50 | | b3 =44 | | b4 =30 | | b5 =12 | |  |
| а1 =54 | 41 | 1 | 13 | 4 |  | 3 |  | 2 |  | 0 | p1=0 |
| a2 =60 |  | 3 | 37 | 6 | 23 | 2 |  | 5 |  | 0 | p2= |
| аз =63 |  | 2 |  | 5 | 21 | 6 | 30 | 7 | 12 | 0 | p3 = |
|  | q1= | | q2= | | q3= | | q4= | | q5= | |  |

базисной. Так как в системе (34), (35) ровно m + n – 1 линейно независимых уравнений, то в любой транспортной таблице должно быть m + n – 1 занятых клеток.

Обозначим через

*μ (p1,,p2,….,pm ,q1,q2,…qn*)

вектор симплексных множителей или потенциалов. Тогда

Δij  = μAij – cij i=; j=

откуда следует

Δij = pi + qj – cij i=; j= (37)

Один из потенциалов можно выбрать произвольно, так как в системе (34), (35) одно уравнение линейно зависит от остальных. Положим, что pi = 0. Остальные потенциалы находим из условия, что для базисных клеток Δij *=* 0.В данном случае получаем

Δ11=0, p1+q1-c11=0, 0+q1- l=0, q1=l

Δ12=0, p1+q2-c12=0, 0+q2- 4=0, q2=4

Δ22=0, p2+q2-c22=0, p2+4- 6=0, p2=2

и т.д., получим: q3 = 0, р3=6, q4= I, q5*= -*6*.*

Затем по формуле (37) вычисляем оценки всех свободных клеток:

Δ21= p2+q5-c21=2+l-3=0

Δ31= p3+q1-c31=6+l-2=5

Δ 32=5; Δ 13=-3; Δ 14 =-1; Δ 24=-2; Δ15=-6; Δ*25*=-4*.*

Находим наибольшую положительную оценку

mах(Δij >0) =5 =Δ 31

Для найденной свободной клетки 31 строим цикл пересчета – замкнутую ломаную линию, соседние звенья которой взаимно перпендикулярны, сами звенья параллельны строкам и столбцам таблицы, одна из вершин находится в данной свободной клетке, а все остальные – в занятых клетках. Это будет 31-11-12-22-23-33. Производим перерас­пределение поставок вдоль цикла пересчета

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 41 | 13 |  |  | 41-p | 13+p |  |  | 20 | 34 |  |
|  | 37 | 23 |  | 37-p | 23+p |  | 16 | 44 |
|  |  | 21 | p |  | 21-p | 21 |  |  |

Получаем второе базисное допустимое решение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| bj  ai | b1 =41 | | b2 =50 | | b3 =44 | | b4 =30 | | b5 =12 | |  |
| а1 =54 | 20 | 1 | 34 | 4 |  | 3 | \* | 2 |  | 0 | p1=0 |
| a2 =60 |  | 3 | 16 | 6 | 44 | 2 |  | 5 |  | 0 | p2=2 |
| аз =63 | 21 | 2 |  | 5 |  | 6 | 30 | 7 | 12 | 0 | p3 =1 |
|  | q1=1 | | q2=4 | | q3=0 | | q4=6 | | q5=-1 | |  |

Находим новые потенциалы, новые оценки. Наибольшую положительную оценку будет иметь свободная клетка 14. Для нее строим цикл пересчета 14-11-31-34 производим перераспределение

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 20 |  |  | 20-р | р |  |  | 20 |
| 21 | 30 | 21+р | 30-р | 42 | 10 |

pvax =20

и получаем третье базисное допустимое решение. Продолжаем процесс до тех пор пока не придем к таблице, для которой все

Δij≤ 0 i = j = .

Продолжая решение, получим

Х=

Для решения транспортной задачи по рассматриваемым исходным данным с помощью средства поиска решения MS Excel разместим в ячейках A1:D3 рабочего листа Excel стоимости перевозок, ячейки А7:D9 отведем под значения неизвестных (объемы перевозок). В ячейках F7:F9 необходимо ввести объемы производства, а в ячейках А11:D11 поместим объемы потребляемой продукции в пунктах назначения. В ячейку Е10 введем целевую функцию СУММПРОИЗВ(A1:D3;А7:D9), вычисляющую стоимость перевозок. Для решения этой задачи с помощью средства поиска решения отведем под неизвестные диапазон ячеек А7:Е11. В ячейках A10:D10 введем формулы в виде =СУММ(А7:А9)…=СУММ(D7:D9), определяющий объем продукции, ввозимый в пункты потребления. В ячейки E7:E9 введем формулы =СУММ(А7:D7)…=СУММ(А9:D9), вычисляющий объем произведенной продукции.

Затем выбираем команду **Сервис, Поиск решения** (Tools. Solver) и заполним открывающееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver) как показано на рис. 4.

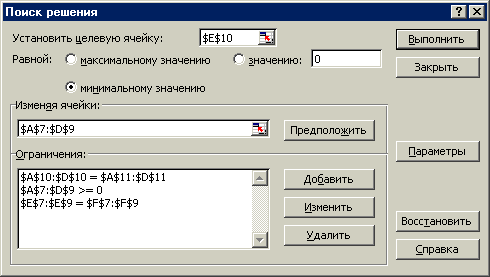


Рис.4.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения (**Solver Options) установим флажок **Линейная модель** (Assume Linear Model). После нажатия кнопки **Выполнить** (Solve) средство поиска решений находит оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему расходы.

3.3. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

3.3.1.. Постановки задач

***Постановка задачи А.*** Пусть на предприятии имеется n типов универсального оборудования и требуется изготовить n видов изделий. Известно время изготовления каждого изделия на всех видах оборудования. Требуется определить какое изделие, и на каком оборудовании необходимо изготовить, чтобы суммарное время изготовления всех изделий было минимально.

***Постановка задачи В.*** Для реализации производственного процесса необходимо выполнить n операций. Имеется n рабочих, которые способны осуществить их, и стоимость выполнения каждым рабочим любой из n операций. Требуется определить: кто и какую операцию должен выполнять, чтобы суммарная стоимость выполнения всего производственного процесса была минимальна.

***Постановка задачи С.*** В технологическом бюро требуется разработать технологический процесс изготовления, состоящего из n деталей. К их разработке можно привлечь n технологов. Известно время, затрачиваемое каждым технологом на разработку отдельного техпроцесса. Требуется определить: какие технологи должны разрабатывать тот или иной техпроцесс, чтобы суммарное время проектирования было минимально.

3.3.2. Математическая модель

Введем переменные Хij , которые равны 1, если i- рабочий выполняет j-операцию и 0, если он не выполняет ее. В качестве критерия оптимизации примем суммарную себестоимость выполнения всех работ Y. Тогда

, (38)

Yij – себестоимость выполнения j–ой операции i-м рабочим.

Ограничения к задаче сформулируем в виде:

1. Каждый рабочий может выполнять только одну операцию

 (39)

1. Каждая операция может быть выполнена только одним рабочим

 (40)

Совокупность целевой функции (38) и ограничений (39, 40) образуют математическую модель типичной экстремальной комбинаторной задачи. Ее решение представляет некоторую перестановку чисел, а количество перестановок с ростом n резко возрастает и равно N = n !.

Данная задача относится к классу задач линейного программирования, так как ограничения и целевая функция имеют линейный вид. Для их решения разработано много способов, одним из которых является венгерский. Кроме того задачи о назначениях удобно решать с привлечением методов, разработанных в MS Excel. В работе по предлагаемым исходным данным необходимо сформулировать задачу о назначениях и решить ее с применением встроенного средства поиска решения Excel.

Рассмотрим пример о назначениях. В качестве формулировки задачи примем задачу В, предполагая, что пятеро рабочих выполняют пять технологических операций. Матрица исходных данных по стоимости выполнения операций производственными рабочими имеет вид



Стоимости Yij выполнения i рабочим j-ой операции разместим в ячейках A1:Е5 рабочего листа Excel. Для решения этой задачи с помощью средства поиска решения отведем под неизвестные диапазон ячеек А7:Е11. В ячейку F6 введем целевую функцию =СУММПРОИЗВ(A1:E5;A7:E11), вычисляющую стоимость работ. В ячейках A12:E12 и F7:F11 введем формулы, задающие левые части ограничений 39.,40 в виде =СУММ(А7:А11)…=СУММ(Е7:Е11) и =СУММ(А7:Е7)…=СУММ(А11:Е11).

Затем выбираем команду **Сервис, Поиск решения** (Tools. Solver) и заполним открывающееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver) как показано на рис. 5.

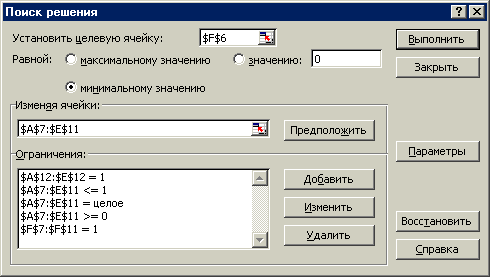
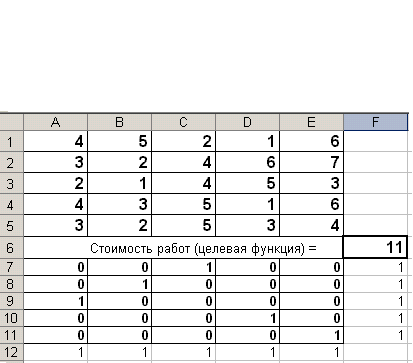


Рис.5

 В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (Solver) необходимо установить флажок **Линейная модель** (Assume Linear Model). После нажатия кнопки **Выполнить** (Solve) средство поиска решений найдет оптимальное решение.

Для рассматриваемого примера оптимальное решение может быть достигнуто в том случае, если первый рабочий будет выполнять третью операцию; второй – вторую; Рис. 6 третий – первую; четвертый –

четвертую, пятый – пятую.

В этом случае суммарная стоимость выполнения всех работ будет составлять 11 единицам.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Задание 2.Транспортная задача линейного программирования | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Вариант 2.1 | | | | |  |  | |  | Вариант 2.2 | | | | |  |  |  | Вариант 2.3 | | |  |  |
|  | 45 | | 60 | | 21 | 24 | |  |  | | 30 | | 11 | 45 | 36 |  |  | 48 | 75 | 41 | 32 |
| 70 | 3 | | 6 | | 3 | 1 | |  | 50 | | 3 | | 2 | 6 | 7 |  | 80 | 4 | 1 | 3 | 1 |
| 70 | 6 | | 2 | | 1 | 6 | |  | 70 | | 7 | | 8 | 3 | 5 |  | 75 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 40 | 10 | | 3 | | 5 | 7 | |  | 40 | | 4 | | 3 | 4 | 6 |  | 40 | 5 | 2 | 3 | 5 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вариант 2.4 | | | | |  |  | |  | Вариант 2.5 | | | | |  |  |  | Вариант 2.6 | | |  |  |
|  | 35 | | 41 | | 52 | 32 | |  |  | | 38 | | 42 | 28 | 41 |  |  | 60 | 32 | 44 | 57 |
| 65 | 2 | | 2 | | 3 | 2 | |  | 62 | | 3 | | 2 | 4 | 3 |  | 50 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 80 | 4 | | 1 | | 5 | 2 | |  | 50 | | 5 | | 3 | 1 | 4 |  | 94 | 4 | 6 | 5 | 2 |
| 47 | 6 | | 4 | | 6 | 3 | |  | 48 | | 4 | | 3 | 6 | 1 |  | 60 | 9 | 4 | 10 | 6 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вариант 2. 7 | | | | | | | |  | Вариант 2.8 | | | | | | |  | Вариант 2.9 | | | | |
|  | 59 | | 27 | | 40 | 35 | |  |  | | 30 | | 58 | 32 | 43 |  |  | 46 | 48 | 44 | 42 |
| 45 | 1 | | 3 | | 2 | 2 | |  | 65 | | 1 | | 3 | 2 | 5 |  | 70 | 4 | 3 | 7 | 6 |
| 58 | 3 | | 2 | | 4 | 3 | |  | 45 | | 4 | | 6 | 5 | 9 |  | 90 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 70 | 4 | | 2 | | 3 | 1 | |  | 70 | | 2 | | 4 | 1 | 3 |  | 38 | 1 | 2 | 4 | 3 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вариант 2.10 | | | | | | | |  | Вариант 2.11 | | | | | | |  | Вариант 2.12 | | | | |
|  | 34 | | 32 | | 4 | 36 | |  |  | | 37 | | 39 | 48 | 40 |  |  | 24 | 20 | 31 | 40 |
| 60 | 2 | | 4 | | 5 | 3 | |  | 70 | | 2 | | 1 | 6 | 5 |  | 30 | 1 | 2 | 2 | 5 |
| 50 | 3 | | 7 | | 4 | 1 | |  | 40 | | 5 | | 3 | 7 | 6 |  | 42 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 45 | 4 | | 6 | | 6 | 2 | |  | 69 | | 3 | | 2 | 4 | 2 |  | 52 | 2 | 4 | 3 | 1 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вариант 2.13 | | | | | | | |  | Вариант 2.14 | | | | | | |  | Вариант 2.15 | | | | |
|  | 30 | | 55 | | 44 | 42 | |  |  | | 48 | | 59 | 68 | 75 |  |  | 50 | 27 | 34 | 54 |
| 35 | 2 | | 3 | | 6 | 4 | |  | 90 | | 3 | | 2 | 6 | 3 |  | 70 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| 53 | 4 | | 1 | | 5 | 7 | |  | 80 | | 5 | | 1 | 4 | 1 |  | 53 | 7 | 3 | 4 | 2 |
| 80 | 5 | | 2 | | 3 | 3 | |  | 72 | | 5 | | 4 | 5 | 4 |  | 54 | 3 | 2 | 5 | 1 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вариант 2.16 | | | | | | | |  | Вариант 2.17 | | | | | | |  | Вариант 2.18 | | | | |
|  | 27 | | 28 | | 39 | 42 | |  |  | | 31 | | 40 | 48 | 20 |  |  | 34 | 40 | 38 | 53 |
| 35 | 3 | | 5 | | 3 | 6 | |  | 45 | | 1 | | 4 | 3 | 4 |  | 85 | 2 | 7 | 2 | 3 |
| 65 | 5 | | 6 | | 1 | 7 | |  | 50 | | 3 | | 4 | 2 | 2 |  | 60 | 1 | 5 | 4 | 2 |
| 40 | 1 | | 4 | | 2 | 3 | |  | 53 | | 4 | | 5 | 6 | 3 |  | 30 | 3 | 4 | 6 | 1 |
|  |  | |  | |  |  | |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Задание 3. Задача о назначениях | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Исходные стоимостные данные задачи о назначении принять одинаковыми с данными транспортной задачи №3, добавив в четвертую строку квадратной матрицы стоимости работ данные первой строки. транспортных издержек, увеличенных на единицу | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Вариант 1.17- Линейная производственная задача | | | |  | | |  | | |  | |
| 15 | | 16 | | 52 | | | 13 | | |  | |
| 2 | | 2 | | 2 | | | 1 | | | 250 | |
| 1 | | 0 | | 4 | | | 3 | | | 220 | |
| 7 | | 3 | | 0 | | | 5 | | | 240 | |